Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. Seien $A \in \mathbb{R}^{k\times k}, C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ und $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Zeigen Sie, dass die Blockmatrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ genau dann invertierbar ist, wenn A und D invertierbar sind. Wie sieht in diesem Fall die Inverse Matrix aus?

Lösung:
Wir nennen die Blockmatrix $\bar{A}$ und bemerken zunächst, dass es sich bei $\bar{A}$ um eine untere Dreiecksmatrix handelt, durch Transposition erhalten wir:

$$\bar{A}^T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Also eine obere Dreiecksmatrix, weiterhin wissen wir aus der Linearen Algebra, dass gilt $det(\bar{A}) = det(\bar{A}^T)$.
Nun zeigen wir die Äquivalenz:

$$\begin{aligned} \bar{A} \text{ invertierbar} &\Longleftrightarrow det(\bar{A}) \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow det(\bar{A}^T) \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow det(A) \cdot det(D) \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow det(A) \neq 0 \text{ und } det(D) \neq 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Äquivalenz gezeigt, wobei wir für die dritte Gleichheit die Tatsache benutzt haben, dass die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonaleinträge ist.

Nun wollen wir $\bar{A}^{-1}$ berechnen.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1 & AB_1 \\ CA_1 + DC_1 & CB_1 + DD_1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} &(i) A \cdot A_1 = I_k && \Longrightarrow A_1 = A^{-1} \cdot I_k \\ &(ii) A \cdot B_1 = 0 && \Longrightarrow B_1 = 0 \\ &(iii) C \cdot A_1 + D \cdot C_1 = 0 && \Longrightarrow C_1 = -D^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot I_k \\ &(iv) C \cdot B_1 + D \cdot D_1 = I_m && \Longrightarrow D_1 = D^{-1} \cdot I_m \end{aligned}$$

Also erhalten wir für

$$\bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot I_k & 0 \\ -D^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot I_k & D^{-1} \cdot I_m \end{pmatrix}$$

T2. Bestimme alle Extremwerte und Sattelpunkte der folgenden Funktionen: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$

Lösung:

Wir bestimmen zuerst den Gradienten der Funktion: $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x - 3y \\ -3x + 2y \end{pmatrix}$.

Nun suchen wir die kritischen Punkte der Funktion, dazu betrachten wir:

$\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y & = 0 \\ -3x + 2y & = 0 \end{cases}$

Wir erhalten also ein Gleichungssystem bestehend aus zwei Gleichungen in zwei Unbekannten. Addieren wir nun das 3-fache der ersten Zeile auf das 4-fache der zweiten Zeile, so erhalten wir:

$$-y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Setzen wir dies in die erste Zeile ein erhalten wir:

$$4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Damit erhalten wir $(0, 0)$ als kritischen Punkt.

Für die Hesse-Matrix erhalten wir:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir erkennen, dass $H_f(0, 0)$ symmetrisch ist. Weiterhin gilt

$$det(H_f(0, 0)) = 8 - 9 = -1.$$

Mit Satz 2.94 können wir also folgern, dass $H_f(0, 0)$ indefinit ist, mit Satz 2.50 erhalten wir dann, dass die Funktion f in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt besitzt.

(b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + (y - 1)^2$

Lösung:

Wir bestimmen zuerst den Gradienten der Funktion: $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} \\ \frac{-x^2}{y^2} + 2(y - 1) \end{pmatrix}$.

Wieder suchen wir die kritischen Punkte der Funktion, dazu betrachten wir:

$\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{y} & = 0 \\ \frac{-x^2}{y^2} + 2(y - 1) & = 0 \end{cases}$

Anhand der ersten Gleichung erkennen wir, dass $y \neq 0$ und $x = 0$ gelten muss. Setzen wir dies nun in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir:

$$2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Damit erhalten wir $(0, 1)$ als kritischen Punkt.

Für die Hesse-Matrix erhalten wir:

$$H_f(x, y) = H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & \frac{-2x}{y^2} \\ \frac{-2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} + 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir erkennen, dass $H_f(0, 1)$ symmetrisch ist. Weiterhin gilt

$$det(H_f(0, 1)) = 4.$$

Da das oberste Diagonalelement $2 > 0$ ist, erhalten wir mit Satz 2.94, dass $H_f(0, 1)$ positiv definit ist, mit Satz 2.50 können wir dann folgern, dass die Funktion f in $(0, 1)$ einen Tiefpunkt besitzt.

(c) $f(x, y) = x^2 \cdot e^y - y^2$

Lösung:
Wir bestimmen zuerst den Gradienten der Funktion: $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \cdot e^y \\ x^2 \cdot e^y - 2 \cdot y \end{pmatrix}$.
Wieder suchen wir die kritischen Punkte der Funktion, dazu betrachten wir:
$\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x \cdot e^y & = 0 \\ x^2 \cdot e^y - 2 \cdot y & = 0 \end{cases}$
Anhand der ersten Gleichung erkennen wir, dass $x = 0$ gelten muss. Setzen wir dies nun in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir:

$$-2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Damit erhalten wir $(0, 0)$ als kritischen Punkt.

Für die Hesse-Matrix erhalten wir:

$$H_f(x, y) = H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^y & 2x \cdot e^y \\ 2x \cdot e^y & x^2 \cdot e^y - 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir erkennen, dass $H_f(0, 0)$ symmetrisch ist. Weiterhin gilt

$$det(H_f(0, 1)) = -4.$$

Mit Satz 2.94 folgt, dass $H_f(0, 0)$ indefinit ist, mit Satz 2.50 können wir dann folgern, dass die Funktion f in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt besitzt.

T3. An welchen Stellen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^3y, x + y^2)$ lokal invertierbar?

Lösung:

Für die Jacobimatrix der Abbildung erhalten wir:

$$D_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y & x^3 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir die Determinante dieser Matrix:

$$det(D_f(x, y)) = 6x^2y^2 - x^3 = x^2(6y^2 - x)$$

Wir überprüfen nun für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Determinante Null wird, d.h wir suchen die $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die gilt $x^2(6y^2 - x) = 0$. Wir erkennen, dass diese Gleichung für $x = 0$ erfüllt ist. Wir betrachten nun die Gleichung $6y^2 - x = 0$ und lösen diese nach y auf:

$$6y^2 - x = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x}{6}} \quad (*)$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

Fall 1: $x < 0$ und $y \in \mathbb{R}$:
Dann hat die Gleichung $(*)$ keine Lösung und die Determinante ist ungleich 0.
Fall 2: $x = 0$ und $y \in \mathbb{R}$:
Dann ist unsere Gleichung $(*)$ gleich 0 und außerdem ist nach obiger Rechnung dann auch unsere Determinante gleich 0.

Fall 3: $x > 0$ und $y = \pm\sqrt{\frac{x}{6}}$:
Dann ist unsere Gleichung $(*)$ gleich Null und somit auch Determinante.

Fall 4: $x > 0$ und $y \neq \pm\sqrt{\frac{x}{6}}$:
Dann ist sowohl unsere Gleichung $(*)$ und auch unsere Determinante ungleich Null.

Wir definieren nun die Menge N , welche die $(x, y) \in \mathbb{R}$ enthält, für die die Determinante gleich Null ist:

$$N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \vee (x > 0 \wedge (y = \sqrt{\frac{x}{6}} \vee y = -\sqrt{\frac{x}{6}})\}$$

Damit ist die Funktion also auf $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}$ lokal invertierbar.